



KOLEKTİF RİSK MODELİ İLE HALKA AÇIK BİR SİGORTA ŞİRKETİNİN TOPLAM HASAR MİKTARININ BELİRLENMESİ

Elif Makbule ÇEKİCİ, Yrd. Doç. Dr.
ecekici@marmara.edu.tr, Marmara Üniversitesi

Elyase İSKENDER, Arş. Grv.
elyase@hotmail.com, Hakkari Üniversitesi

Buket ALKAN, Doktora Öğr.
Buket.ALKAN@vakifbank.com.tr,

Özet: Sigorta şirketlerinin varlıklarını sürdürebilmeleri açısından hayat dışı branşlarda toplam hasarın dağılımının bulunması önemli bir konudur. Bu dağılımın belirlenebilmesi için toplam hasarı meydana getiren hasar miktarları ve hasar sayılarının dağılımlarının belirlenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada bir sigorta şirketinin hayat dışı branşlarından biri olan kaza branşına ilişkin olarak 2009-2013 yıllarına ait çeyrek dönemlik verileri kullanılarak toplam hasar olasılıkları hesaplanmaya çalışılmıştır. Toplam hasar olasılıklarını hesaplamak için Panjer tarafından ortaya atılan özyineleme yöntemi (Panjer Yöntemi) kullanılmıştır. Yapılan hesaplamalar neticesinde şirketin toplam hasar seviyesi belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Panjer Özyineleme Yöntemi, Kolektif Risk Modeli, Hayat Dışı Sigortalar, Toplam Hasar Miktarı, Sigorta Şirketi

DETERMINING THE TOTAL LOSS AMOUNT FOR A PUBLIC INSURANCE COMPANY WITH COLLECTIVE RISK MODEL

Abstract: It is an important issue for non-life insurance firms to know about total loss distribution to survive these firms. To fit this distribution we must know about amount of damage and loss frequency which consist total damage. In this paper; we tried to calculate the total probability of loss related with the accident branch which occurs in the terms of 2009-2013 quarters for kind of an non-life insurance firm. We have used the recursive method (Panjer Method) which is suggested by Panjer to calculate total probability of loss. In consequence of these calculations we have determined the level of total loss of the firm.

Keywords: Panjer Recursion, Collective Risk Model, Non-Life Insurance, Total Loss Amount, Insurance Company

1. GİRİŞ

Sigorta şirketleri açısından en önemli risk, toplanan primlerin hasar ödemelerini karşılamaması sonucu ortaya çıkmaktadır. Reasürans şirketleri aracılığı ile riski transfer etmeye çalışan şirketler için önemli olan toplam hasar miktarının doğru tahmin edilebilmesidir. Doğal afetler (deprem, sel, heyelan gibi), salgın hastalıklar, savaş gibi ender görülen ancak büyük kayıplara yol açan risklere ve finansal risklere karşı önlem almak, sigorta şirketinin devamlılığı açısından büyük önem taşımaktadır.

Cramer, savaş, salgın doğal afet vb. sebeplerden gerçekleşen aşırı ölümler gibi dış riskler ve herhangi bir belirli sebebe bağlanamayan ve yüksek kayıplara yol açan rassal dalgalanmaları sigorta riski olarak tanımlamıştır. Bu rassal riskten korunabilmek için gerekli olan hesaplar risk teorisinin doğmasını sağlamıştır. Risk teorisi için bireysel risk modeli (Klasik) ve kolektif risk modeli olmak üzere iki farklı anlayış ortaya çıkmıştır. Bireysel risk modeli, portföyün toplam kayıp veya kazancını hesaplamak için her bir sigortalının kayıp/kazancının ayrı ayrı değerlendirilerek toplanması ile portföy için kayıp/kazanç tahminini yapmaktadır. Kolektif risk modeli ise toplam riski bir bütün olarak ele almaktadır. Kolektif risk modeli ilk olarak İsviçreli aktüer Filip Lundberg tarafından önerilmiş sonrasında Cramer, Arfwedson, Segerdahl, Saxen, Esscher, Ammeter, O. Lundberg, de Finetti, Thepaut, Wyss ve Pentikainen tarafından geliştirilmiştir. Kolektif risk modeli iki problemi gözönüne alır: toplam kazancın veya bir portföyün toplam hasar sayısının dağılım fonksiyonunu bulmak ve toplam riske ait risk rezervinin kullanılacağı olasılığını bulmak (Kahn, 1962). Kolektif risk modelinin şirket verilerine uygulanabilmesi için Esscher metodu, Normal etkili seriler metodu, Erlang Modeli, Panjer yöntemi gibi matematiksel modeller önerilmiştir.

Bu çalışmanın amacı, toplam hasar miktarının kolektif risk modeli ile belirlenmesinde, Panjer yöntemi kullanılarak Türkiye'de faaliyet gösteren bir sigorta şirketinin kaza sigortası için toplam hasar miktarını belirlemektir. Panjer yöntemi uygulanırken şirkete ait 2009-2013 dönemini içeren veriler kullanılmıştır.

2. KOLEKTİF RİSK MODELİ

Bir sigorta şirketi için karşılaşılabilecek toplam hasarın tahmin edilmesi şirket için hayati önem arz etmektedir. Çünkü tahmin edilemeyen yüksek hasarlar sigorta şirketini iflasa sürükleyebilir. Toplam hasarın tahmin edilmesinde kolektif risk modellemesi yaygın olarak kullanılmaktadır. Kolektif risk modelinde N toplam hasar sayısını ve X_i 'ler ($i=1,2,3,...,N$) sigorta riskine ait belirli bir zaman aralığında bir portföyde meydana gelen hasar miktarını göstermek üzere, toplam hasar miktarı



$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N = \sum_{i=1}^N X_i \quad (1)$$

şeklinde ifade edilmektedir (Dickson, 2006). Kolektif risk modelinin varsayımları aşağıdaki gibidir:

1. X_i 'ler aynı dağılıma sahip rassal değişkenlerdir.
2. X_i rassal değişkenlerinin ortak dağılımı N 'ye bağlı değildir.
3. N 'nin dağılımı $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ değerlerine bağlı değildir (Klugman, 2012).

Belirli bir zaman aralığında karşılaşılabilecek toplam hasarın tahmin edilebilmesi için toplam hasarın tahmin edilebilmesi için toplam hasar dağılımının belirlenmesi gerekir. Toplam hasar dağılımının belirlenmesinde izlenecek yaklaşım,

- Verilere dayanan N için bir dağılım önermek
- Verilere dayanan X_i 'ler ($i=1,2,3,\dots,N$) için bir dağılım önermek
- Bu iki dağılımı kullanarak toplam hasar S nin dağılımını bulmak için gerekli hesaplamaları elde etmek şeklinde sıralanabilir (İrven, 2011).

III. PANJER YÖNTEMİ

Panjer tarafından keşfedilen bu yaklaşım, hasar olasılıklarını hesaplamak için yaygın olarak kullanılan bir yöntem olmuştur. Bu yaklaşımın, şimdiye kadar olan yaklaşımlardan çok daha üstün ve gerçekçi bir alternatif olmasının yanı sıra programlanması da kolaydır (İrven, 2011).

Panjer metodu daha geleneksel olan Monte Carlo simülasyon yöntemlerine bir alternatif olarak düşünülebilir. Aynı zamanda risk teorisi metodlarına da bir alternatiftir. Panjer yönteminin en büyük avantajı, bir blok halindeki poliçelere ilişkin verilen hasarların dağılımlarının toplam birleştirilmiş halleri daha çabuk ve direkt olarak hesaplayabilmektir. Dolayısıyla Panjer metodu bir sigorta şirketinin konservasyon seviyesini belirlemede ve reasürans politikalarını oluşturmada oldukça kullanışlıdır. (Spencer, 2000)

Bu yöntemde önceden hesaplanmış toplam hasar şiddetinin 0 olma olasılığı vardır. Büyük portföyler için bu olasılık çok küçüktür, hatta o kadar küçüktür bilgisayarların tanıdığı en küçük rakamın altında kalmaktadır ve bu bilgisayar ortamında yapılan hesaplamalarda sorunlar yaratmaktadır. Çünkü bilgisayar tanımadığı bu küçük rakam için mecburen 0 değerini almaktadır. Bu sorunu ortadan kaldırmak için bir kaç farklı çalışma yapılmıştır.

Bunun yanında bu yöntemde ortaya çıkan başka bir sorun ise değerlerin yuvarlanmasıdır. Bilgisayar ortamında virgülden sonra tanınan hane sayısı belirlidir ve bu yöntemin ihtiyaçlarını karşılayabildiği durumlar ortaya çıkmaktadır. Yuvarlamalar sonucunda belli bir hata payı ortaya çıkmaktadır ve buradaki en büyük sorun bu hata payının ne kadar hızlı büyüdüğüdür. Hata payları ayrı bir inceleme konusudur ve üzerine bir çok çalışma yapılmıştır (Doğan, 2010).

Panjer yöntemi, hayat dışı aktüeryal gerçek yaşamda görülen hasar olasılıklarının bütün parametrik versiyonları X_i 'lerin dağılımının, yaklaşık olarak kesikli hale getirilerek, özyineli olarak hesaplanabilmesi esasına dayanmaktadır. X_i 'ların dağılımı sürekli bir dağılım olduğunda, bu dağılım kesikli hale getirilmelidir ki bunun için en kolay yaklaşım, dağılım açıklığı olan uygun bir h ölçüm birimi üzerinden yuvarlama yöntemi uygulayarak kesikli hasar miktarı dağılımını oluşturmaktır. Yuvarlama yöntemi, $(j+1)h$ ile jh arasındaki olasılığı bölüp, en yakın uygun olan dağılım açıklığına bütün miktarları yuvarlamaktadır. (İrven, 2011) Nitekim bu yöntem aracılığıyla, sürekli olan hasar miktarı dağılımı, belirli aralıklar dahilinde

$$f_0 = P\left(X < \frac{h}{2}\right) = F_X\left(\frac{h}{2} - 0\right)$$

$$f_j = P\left(jh - \frac{h}{2} \leq X < jh + \frac{h}{2}\right)$$

$$= F_X\left(jh + \frac{h}{2} - 0\right) - F_X\left(jh - \frac{h}{2} - 0\right), \quad j = 1, 2, \dots$$

olacak şekilde kesikli hale getirilerek $j=0,1,2,\dots$ için jh 'de yer alan f_j olasılıkları bulunmaktadır (Klugman, 2004). Hayat dışı sigortalarda kolektif risk modellemesiyle toplam hasar değişkeninin dağılımının belirlenmesinde, toplam hasar sayısı olan K 'nin dağılımına ilişkin öne çıkan en önemli dağılımları $(a, b, 0)$ sınıfı üyeliğinde olan dağılımlar oluşturmaktadır. Frekans dağılımı olan, kesikli bir rassal değişkenin olasılık fonksiyonu olup p_k

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

ifadesine göre a ve b sabitlerinin var olmasını sağlayan iki parametrelili $(a, b, 0)$ dağılımlar sınıfının bir üyesidir (Klugman, 2004). Panjer'in özyinelemesi, dağılımdaki başarılı olasılıkların nispi büyüklüklerini tanımlar. Sıfırdaki olasılık, p_0 , özyineleme formülünden elde edilebilir, çünkü olasılıklar 1'e tamamlanmalıdır. Bu bir sınırlama koşulu sağlamaktadır. Bir $(a, b, 0)$ sınıf dağılımı, parametreleri a ve b olan iki parametrelili sınıftır. Poisson, Binom ve Negatif Binom, için olasılık fonksiyonunda sol taraftaki değerler yerine konularak, bu üç dağılımın her birinin özyinelemeyi sağladığı görülmektedir. a ve b değerleri tabloda verildiği şekilde elde edilmektedir. Aynı zamanda tabloda, özyineleme için başlangıç değeri olan p_0 değerleri de yer almaktadır. Tabloda yer alan Geometrik dağılım negatif binom dağılımının $r=1$ olması durumundaki özel halidir. Aşağıdaki tabloda söz konusu özyineleme formülünü sağlayan olası dağılımlar yer almaktadır.

Tablo 1: $(a,b,0)$ sınıfındaki dağılımlar için a,b ve Başlangıç Değerleri

Distribution	a	b	p_0
Poisson	0	λ	$e^{-\lambda}$
Binomial	$\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$(1-q)^m$
Negative binomial	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1+\beta)^{-r}$
Geometric	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1+\beta)^{-1}$

Özyineleme formülü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$k \frac{p_k}{p_{k-1}} = ak + b, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Eşitliğin sol tarafı, k 'ya bağlı bir lineer fonksiyondur. Tabloda Poisson dağılımı için düz çizginin eğimi yani a 'sı 0'dır. Binom dağılımı için negatif, Negatif Binom dağılımı ve Geometrik dağılım için ise pozitiftir. Bu bize hangi dağılımın daha iyi uyacağına karar verme açısından grafiksel bir gösterim sunmaktadır. Eğer bu modellerden biri seçilecekse gözlemlenen değerler yaklaşık bir düz doğru oluşturmalıdır ve eğimin değeri hangi modelin seçilmesi gerektiğine dair bir gösterge olacaktır. Aşağıdaki gösterimler dikkate alınarak toplam hasar miktarlarının dağılımları N 'in dağılımına göre değişen şekilde verilecektir: (Klugman, 2004). Gösterimler;

$$P(X=k) = x(k), \quad k \in \mathbb{N}$$

$$P(Z=j) = z(j), \quad j \in \mathbb{N}_0$$

$N \sim P(\lambda)$ için Panjerin özyinelemeli formülü aracılığıyla toplam hasar miktarı Z 'nin dağılımı,

$$z(j+1) = \frac{\lambda}{j+1} \sum_{i=0}^j z(j-i)x(i+1)(i+1), \quad j \in \mathbb{N}_0; \quad z(0) = e^{-\lambda}$$

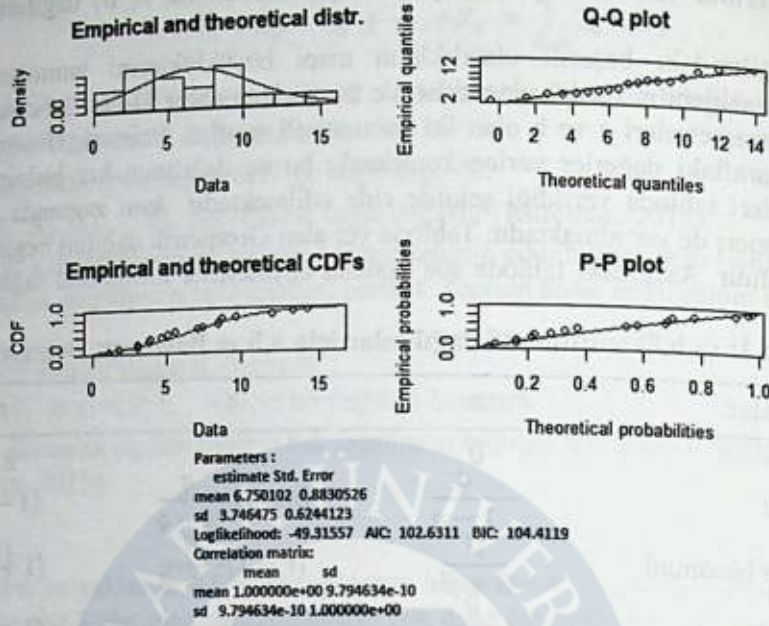
$N \sim NB(r, p)$ için Panjerin özyinelemeli formülü aracılığıyla toplam hasar miktarı Z 'nin dağılımı,

$$z(j+1) = \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j z(j-i)x(i+1)(1-p)((j-i)+r(i+1)), \quad j \in \mathbb{N}_0; \quad z(0) = p^r$$

IV. UYGULAMA

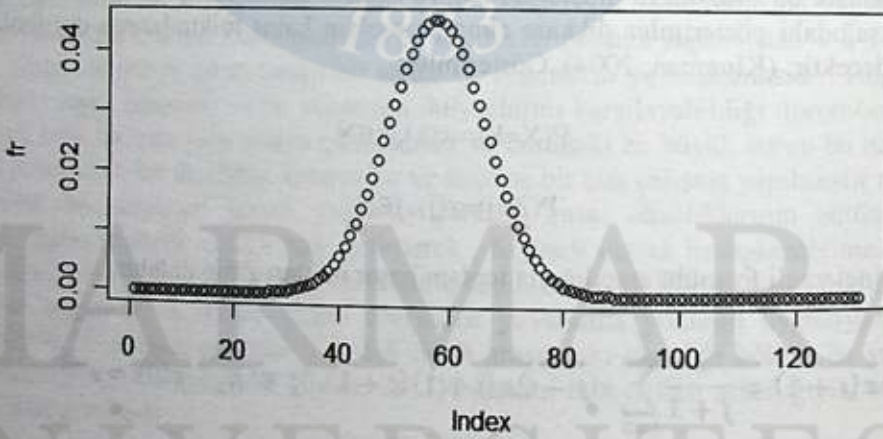
Halka açık bir sigorta şirketinin 2009 – 2013 dönemine ait kaza sigortası verileri kullanılarak toplam hasarın dağılımı bulunmaya ve toplam hasarın belirlenmesine çalışılmıştır. Uygulama dört aşama şeklinde gerçekleştirilmiştir.

a) Hasar Miktarlarının Dağılımının Bulunması : Öncelikle kaza sigortasına ait verilerin dağılımı incelenmiş ve normal dağılıma uyduğu tespit edilmiştir. İşlemler R'de "fitdistrplus" paketi kullanılarak yapılmıştır (Delignette-Muller, 2013).



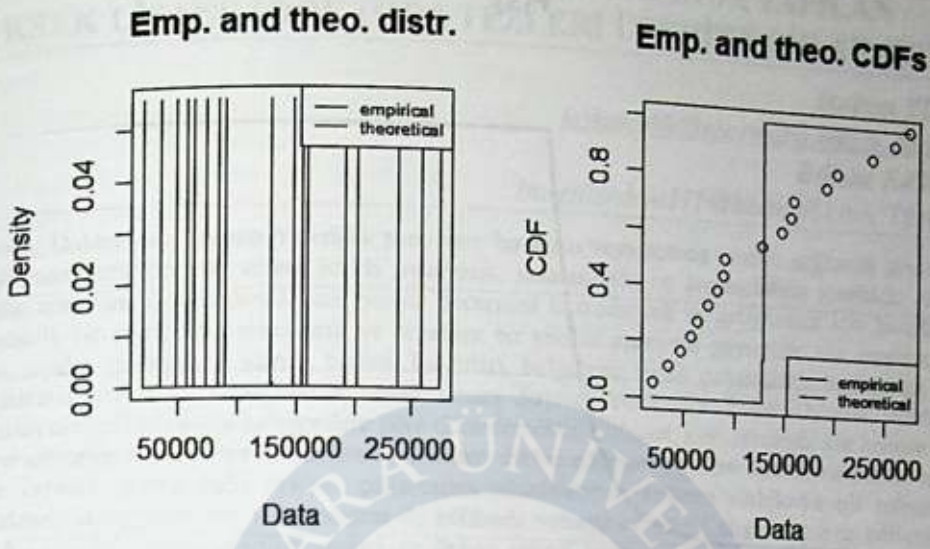
Şekil 1 Hasar Miktarları Dağılımı

b) Hasar Miktarı dağılımının kesiklileştirilmesi : Bu aşamada bulunan dağılım kesiklileştirilerek panjer uygulamasında kullanılır hale getirilmiştir. Kesiklileştirme işlemlerinde R'nin "actuar" paketi kullanılmıştır (Dutang, 2008).



Şekil 2 Hasar Miktarı Kesiklileştirilmiş Durum

c) Hasar Sıklıkları Dağılımının Bulunması : Hasar sıklıklarının $\lambda=128.352$ olan poisson dağılımına uyduğu tespit edilmiştir.



Fitting of the distribution ' pois ' by maximum likelihood
Parameters :
 estimate Std. Error
 lambda 128352.7 82.89721
 Loglikelihood: -420941.7 AIC: 841885.4 BIC: 841886.2

Şekil 3 Hasar Sıklıkları Dağılımı

d) Bulunan Hasar Sıklıkları Dağılımı ve Kesikleştirilen Hasar Miktarı Dağılımı Kullanılarak Panjerin Uygulanması : Panjer uygulamasında ve kesikleştirme işlemlerinde R'nin "actuar" paketi kullanılmıştır (Dutang, 2008). Yapılan hesaplamalarda E-332'nin altındaki sayıları 0 olarak aldığından "underflow" problemi ortaya çıkmaktadır ve bu sebeple panjer özyinelemesi başlayamamaktadır. Poisson için Panjer ifadesi,

$$f(0) = e^{-\lambda(1-p(0))};$$

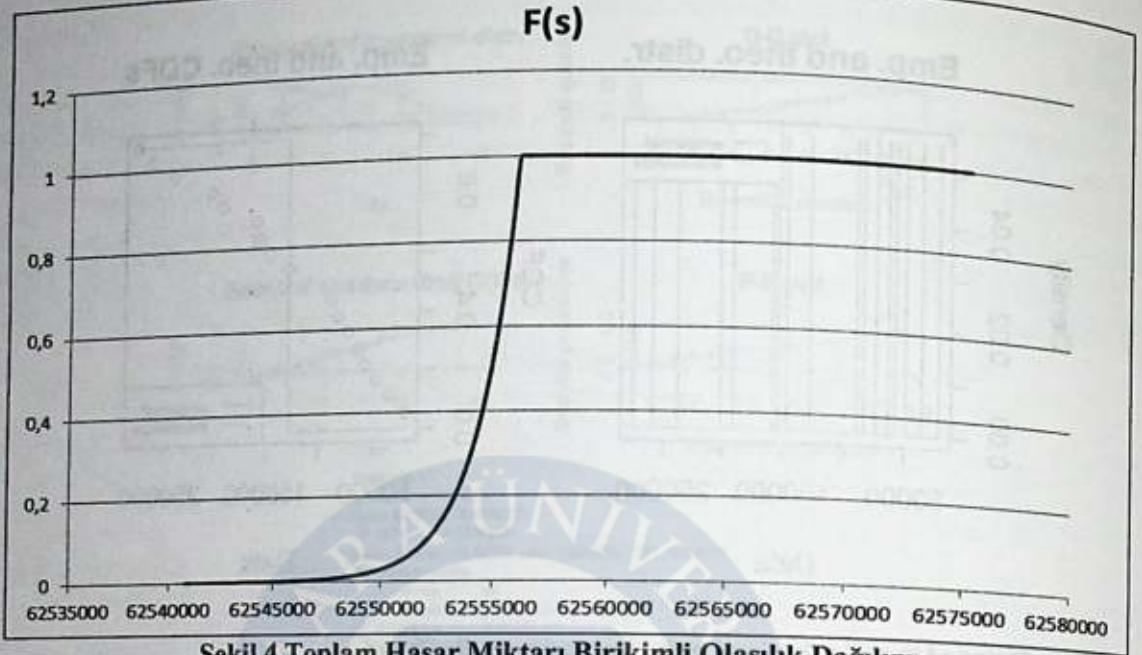
$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{h=1}^x \lambda h p(h) f(x-h);$$

şeklinde olduğundan bilgisayarın kısıtlamalarına takılmamak için $(1-p(0)) > 727$ olacak şekilde işlem yapmak gerekmektedir (Kaas, 2008).

Bu problemi aşmak için hesaplamaların daha küçük bir λ için yapılması ve sonrasında bulunan sonucun konvolüsyona tabi tutulması gerekmektedir. Yani burada λ 'nın 2^n 'e bölünmesi ve sonrasında sonucun elde edilmesi için n kez konvolüsyon uygulanması önerilmektedir (Panjer, 2006). n ve λ^* ,

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{2^n} = \frac{128350}{2^8} = 501,37$$

şeklinde bulunabilir. $\lambda^* = 501,37$ alınır ve $n=8$ kez konvolüsyon uygulayarak hesaplamalar yapıldığında aşağıdaki sonuç bulunmuştur.



Şekil 4 Toplam Hasar Miktarı Birikimli Olasılık Dağılımı

V. SONUÇ

Yapılan bu çalışmada kaza sigortası için bulunan konvolüsyon değerine göre hesaplanan toplam hasarın 62.556.160 TL seviyesine çıkabileceği gözlemlenmiştir. Dolayısıyla sigorta şirketinin bu hasar miktarını göz önünde bulundurarak rezervlerini dengelemesi gerekmektedir. Bu çalışma şirketin çok sayıdaki sigorta branşından biri için yapılmış olup diğer sigorta branşları için de yapılarak sigorta şirketinin tüm portföyünün toplam hasar beklentisi hesaplanabilecektir. Böylece şirket açısından risk azaltılabilecektir.

KAYNAKÇA

- Dutang, C., Goulet, V., Pigeon, M., "Actuar: An R package for Actuarial Science", Journal of Statistical software, 2008, vol.25, no.7, 1-37.
- Dickson, D. C., Collective Risk, Insurance Risk And Ruin, Cambridge: Cambridge University Press, 2006, s.53
- Doğan, U., "Sigorta Şirketlerinde Hasar Modellemesi", Marmara Üniversitesi Bankacılık ve Sigortacılık Enstitüsü, Sigortacılık Anabilim Dalı, 2010.
- Kahn, P. M., "An Introduction To Collective Risk Theory And Its Application To Stop-Loss Reinsurance", Transactions Of Society Of Actuaries 1962 Vol. 14 Pt. 1 No. 40
- Delignette-Muller, M.L., "fitdistrplus: help to fit of a parametric distribution to non-censored or censored data", 2013
- İrven, P.B., Güçyapar, G., "Kollektif risk modellemesinde Panjer Yöntemi", Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, 2011, 139-149.
- Panjer, H. H., Operational Risk Modelling Analytics., John Wiley & Sons, Inc. Publication, 2006
- R. Kaas, Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M., Modern Actuarial Risk Theory Using R., Springer, 2008
- S. A. Klugman, Panjer, H. H., Loss Models: From Data to Decisions, Wiley, 2012, s.210
- Spencer L., Re, L., "An Overview of The Panjer Method For Deriving The Aggregate Claims Distribution.", Lincoln National Reinsurance Company, 2000
- Stuart A. Klugman, Panjer, H. H., Willmot, G.E., Loss Models. New Jersey, Wiley, 2004