

BİST-100 GETİRİLERİ DAĞILIMININ BENFORD KANUNUNU İLE TESTİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ Murat ÇİNKÖ, Doç. Dr.
mcinko@marmara.edu.tr, Marmara Üniversitesi

Özet: Newcomb kütüphanedeki logaritma kitaplarının ilk sayfalarının sonraki sayfalarına göre daha fazla yıpranmış olduğunu farkettikten sonra bunun sebebini araştırmış ve sayıların ilk basamağında küçük sayıların büyük sayılara göre daha fazla tekrar ettiğini görmüştür. Bu ispatın ardından bir çok alanda uygulamalar yapılarak Benford kanunun'un fark ettiği gerçeği matematiksel olarak ispatlamıştır. Bu çalışmada Borsa İstanbul'un bir günlük getirilerinin Benford kanunun'un bir günlük verilerde kullanıldığı görülmüştür. Bu çalışmada Borsa İstanbul'un bir günlük getirilerinin Benford kanunu'na uygun dağıldığı bulunmuştur. serijesinde getirilerin Benford kanunu'na uygunluğu test edilmiş ve %1 anlamlılık

Anahtar Kelimeler: Benford kanunu, Getiri Dağılımı

TESTING DISTRIBUTION OF BIST-100 RETURNS BY BENFORD LAW

Abstract: Newcomb realizes that book of logarithm tables in library had more wear and tear on the first pages than the others and think that smaller digit are more frequent than the bigger digit. Benford gave mathematical proof of the idea of what Newcomb said and prove the theory by using 20 different example of real life data. In this study distribution first digit of one day return of BIST is tested. As a result of the study it can be said that one day return of BIST agrees with Benford's law at %1 significance level.

Keywords: Benford's law, Distribution of return

I. GİRİŞ
Sayıların ilk basamağında yer alan rakamlar düzgün dağılıma sahip olsa idi her bir rakamın birinci basamakta yer alma olasılığı 0,11 (1/9) olurdu. 1881 yılında astronom ve matematikçi Simon Newcomb sayıların birinci basamağında yer alan rakamların eşit olasılığa sahip olmadığını gösteren ilk çalışmayı yapmıştır. Newcomb kütüphanedeki logaritma kitaplarının ilk sayfasının ikinci sayfaya göre, ikinci sayfanın ise üçüncü sayfaya göre daha fazla yıpranmış olduğunu görmüş ve diğer sayfalar için de geçerli olduğunu görünce sebebini araştırmaya başlamıştır. Sonuçta doğada küçük rakamlar ile başlayan sayıların daha fazla olduğunu keşfetmiştir. 1938 yılında bir fizikçi olan Albert Frank Benford bugün kendi ismi ile anılan yasayı bulmuştur. Benford değişik alanlardan topladığı 20,229 veri üzerinden yaptığı incelemede verilerin küçük rakamlarda başlama olasılığının büyük rakamla başlama olasılığından daha fazla olduğunu bulmuştur. Bu çalışmada günlük BİST getirilerinin Benford kanununa uygunluğu test edilecektir. Çalışma şu şekilde sunulacaktır Benford kanununun açıklanmasında sonra, literatürde yapılan uygulamalardan örnekler verilecek ve BİST veri seti tanıtılıp uygulama yapıldıktan sonra sonuçlar değerlendirilecektir.

II. BENFORD KANUNU

Benford bir sayının birinci basamağındaki olasılı (1) nolu formülü kullanarak hesaplanabileceğini göstermiştir.

$$P(d) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{d}\right) \quad d: 1,2,3,\dots,9 \quad (1)$$

Benford aynı formülün her hangi bir sayının diğer basamaklarda görülme olasılığını hesaplamada kullanılabileceğini göstermiştir. İkinci basamakta her hangi bir rakamın olma olasılığını ise

$$P(d) = \sum_{k=1}^9 (\log_{10} (1 + (10 \cdot k + d)^{-1})) \quad d: 0,1,2,3,\dots,9 \quad (2)$$

şeklinde hesaplamıştır. Herhangi bir sayının birinci basamağının "1" ile başlama olasılığı 0,30103, "10" ile başlama olasılığı ise 0,0414 ve ikinci basamağında "0" olma olasılığı ise 0,119679 olacaktır. Tablo1'de sayıların birinci ve ikinci basamaklarında ilgili rakamların olma olasılıkları verilmiştir. Diğer basamaklar iki numaralı formülün kullanılarak hesaplanması da mümkündür.

Tablo 1. Rakamların Birinci ve İkinci Basamaklarda Olma Olasılıkları

	Birinci Basamak	İkinci Basamak
0		0.1196
1	0.3010	0.1138
2	0.1761	0.1088
3	0.1249	0.1043
4	0.0969	0.1003
5	0.0792	0.9667
6	0.0669	0.9337
7	0.0580	0.9035
8	0.0512	0.8757
9	0.0458	0.8499

Tablo 1'den görüleceği gibi rakamların sayıların birinci ve ikinci basamaklarda olma olasılıkları düzgün dağılımdan oldukça farklıdır. Ölçümler sonucunda elde edilen sayıların Benford kanununa uygunluk göstermemesi ölçüm değerlerinde anormallik olarak düşünülmektedir. Bu noktadan hareketle Benford kanunu mali denetim, vergi denetimi gibi konularda yardımcı olabileceği düşünülmüştür. Benford kanunu sadece doğal olarak elde edilen sayısal verilere kullanılabileceği unutulmamalıdır. Posta kodu, kimlik numarası, telefon numarası gibi sayısal veriler sadece kategori göstereceği için bu tip kategorik sayısal verilere Benford yasasına uygunluğu test edilmemektedir. Ayrıca Benford kanunun kullanılabilmesi için: veri setindeki sayıların aynı tip olayları göstermesi gerekmektedir. Örneğin şehirlerin nüfusu, göllerin alanı, piyasa değeri, net gelirler veya yatırım fonlarının varlıkları gibi. Veri setinin maksimum ve minimum sayılarının belirlenmemiş olması gerekir. Pinkham (1961:1225) verilerin sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılarak elde edilmesi sonucu elde edilecek yeni veri setinde Benford kanununun geçerli olduğunu gösteren ilk kişi olmuştur. Başka araştırmacılar da (Whittaker(1983:258) , Hill (1995:890)) yaptıkları çalışmalar ile kanunun farklı tabanlı logaritmalar kullanıldığında da geçerli olduğunu göstermişlerdir.

III. LİTERATÜR TARAMASI

Benford kanununun muhasebe verileri ile ilk uygulamasını Carslaw yapmıştır. Carslaw (1988:325) yöneticilerin net gelirlerini fazla olduğunu göstermek için psikolojik sınırlarda yukarıya yuvarlama eğiliminde olduğunu örneğin 789,000 değerini 800,000 ve 19.97 milyonu ise 20 milyon olarak yuvarladıklarını iddia etmiştir. Bu durumda ikinci basamakta sıfır değerinin yer alma sıklığını yükseltmekte ve dokuz rakamının olma sıklığını düşürmektedir. Yeni Zelanda şirketlerinde yaptığı uygulamada ikinci basamakta yer alan rakamların dokuzun olması gerekenden az ve sıfırın ise olması gerekenden fazla olduğunu göstermiştir.

Drake ve Nigrini (2000:130) denetçilerin genellikle ilk iki basamak dağılımını incelerken beklenenden daha fazla gerçekleşen değerlerde hile olduğunu düşündüklerini beklenenden daha az gerçekleşen değerlerin ise göz ardı edilebileceğini belirtmektedirler. Drake ve Nigrini (2000:135) 38176 adet bir şirkete ait kayıtları incelemek için ön hazırlık yapmış ve 50\$ altındaki tutarları (verilerin %14'ü) veri setinden çıkarmıştır. Veri setinin birinci, ikinci ve ilk iki basamağını incelemiştir. Mutlak farkların ortalamasını incelediğinde birinci ve ikinci basamağın Benford yasasına uygun, ilk iki basamağın ise marjinal olarak kabul edilebilir olduğunu görmüştür. Gözlenen ve beklenen değerlerin frekanslarını oranladığında bazı miktarların detaylı incelenmesi gerektiğini fark etmişlerdir. Detaylı inceleme sonucunda bu değerlerin hileli kayıt değil de belirli sebeplerle beklenenden fazla gözlemlendiğini bulmuşlardır.

Nigrini ve Miller (2009:310) denetçilerin iç denetim esnasında ikinci derece test kullanarak Benford kanununa uygunluğu test edebileceğini dört farklı veri seti ile göstermeye çalışmışlardır. Sıralanan veri setindeki gözlemlerin farklarının basamaklarında yer alan rakamların Benford kanununa uygun olduğunu veri setinin dağılımından bağımsız olduğunu bulmuşlardır.

Tödter (2009:345) 117 bilimsel makalenin çıktılarında yer alan regresyon katsayılarını ve standart sapmalarını incelemiş ve makalelerin yaklaşık %10'unun Benford kanununa uygun sonuçlar vermediğini tespit etmiştir. Benford kanunun anormallikleri, manipülasyonları ve yanlışlıkları tespit etmek için kullanılabileceğini ancak kesin olarak hatalı sonuç anlamına gelmediğini sadece tespit edilen anormalliklerin daha dikkatli incelenmesi gerektiği sonucuna varmıştır. Quick ve Wolz (2005:1290) 1994 ile 1998 tarihleri arasında 1820 firmanın finansal tablolarını inceleyerek yapılan denetimlerin etkinliğini ölçmüşlerdir. 1997 yılında birinci basamaklar incelendiğinde beş rakamının az sekiz rakamının ise çok fazla görüldüğünü tespit etmişlerdir. Ancak genelde bakıldığında bu farklılaşma Benford kanunu kabul edilmesini engellemiştir. İkinci basamaklar incelendiğinde ise 1997 yılında bir, üç ve sekizin beklenenden fazla ve altı ve dokuzun beklenenden az gözlemlendiğini tespit etmişlerdir. Genel itibari ile Alman finansal verilerinde Benford yasasına uyduğunu bulmuşlardır.

Geyer (2010:78) 393 işletme öğrencisine bilançoda var olan zararı dikkat çekmeden dengelemelerini istemiştir. Birinci ve ikinci basamaklarda Benford yasasına uyumsuzluk olmadığını, sıfırların %1 düzeyinde anlamlı farklılığa ve ikinci basamakda yer alan beş ve üçüncü basamakta yer alan altı sayısının %1 düzeyinde anlamlı olduğunu tespit etmiştir.

Hickman ve Rice (2010:340) 43 yıllık dönem için FBI veri tabanından 25 farklı kategorideki aylık suç rakamlarının Benford kanununa uygunluğunu araştırmışlardır. Ulusal bazda birinci, ikinci basamak ve ilk iki basamak testlerinde sayıların Benford kanuna uygun olduğunu bulmuşlardır. Pensilvanya eyaleti bazında birinci basamak kanuna uygun iken ikinci ve ilk iki basamak testinde gözlemlerin Benford kanununa uygun olmadığını tespit etmişlerdir.

Leemis, Schmeiser ve Evans (2000:239) yaşam dağılımlarının Benford kanuna uygunluğunu sınımışlar ve bazı parametrik dağılımların uygun olduğunu bulurken bazı dağılımlarda Benford kanununun zayıf kaldığını tespit etmişlerdir.

Knuth (1969), Burke ve Kincanon (1991:225) fizik kitaplarında yer alan sabit sayıları (ışık hızı, yer çekimi gibi) incelediklerinde katsayıların %30'unun bir ile başladığını görmüşlerdir.

Buck, Merchant ve Perez (1993:62) 477 radyoaktif maddenin yarılanma zamanının benford kanununa uyduğunu tespit etmişlerdir.

Nigrini ve Wood (1996) 1990 yılında ABD'de yapılan tam sayım ile elde edilen 3141 şehrin nüfus bilgisinin Benford yasasına uyduğunu göstermişlerdir.

Levy (1995:313) DJIA ve S&P endeksinin bir günlük getirilerini incelediğinde Benford kanuna uyduğunu göstermiştir. Shengmin ve Wenchao (2010) Çin borsasının iki önemli endeks değerinin günlük getirilerinin ilk basamağında yer alan rakamların Benford kanununa uyduğunu göstermişlerdir. İlk basamakta yer alan dokuz rakamının beklenenden biraz fazla gerçekleştiğini daha sonraki çalışmalarda psikolojik bariyer olup olmadığını test edilebileceğini ifade etmişlerdir. Schity ve diğerleri (2005:476) on Avrupa birliği ülkesinden marketlerdeki ekmek, içecek ve kozmetik ürünlerinin perakende fiyatlarının Euro'ya geçilmeden önceki ve sonraki dönemde marketlerden toplanan fiyatlarının Benford kanununa uyup uymadığını göstermişlerdir. Fiyatların hem cari hemde reel olarak basamaklarda bulunma oranlarını incelemişler ve psikolojik etkinin var olduğunu rakamlardan dokuzun beklenen orandan fazla olduğunu ortaya koymuşlardır.

Arar (2011:63) bir firmanın ticari mallar hesabının borç kayıtlarını incelemiş ve birinci basamak dağılımının Benford kanununa uymadığını tespit etmiştir. İncelemesini derinleştirdiğinde ise firmanın birim fiyatı \$1000 olan bir ticari mal çok sıklıkla aldığını ve bu sebeple belli rakamlarda çok fazla sayıda gözlem olduğunu bulmuştur. Sonuç olarak denetimde bilgisayar destekli denetim tekniğinin kullanılmasının zaman ve maliyet etkinliğini artıracığını düşünmüştür. Türkşener (2007:115) Benford analizlerinin doğru şekilde uygulandığında daha sonraki incelemeler için şüpheli hesapların ortaya çıkarılmasında kullanışlı bir araç olduğunu belirtmektedir. Akbaş (2007:198) Benford kanunu'nun denetimde kullanımı üzerine yoğunlaşmıştır. XYZ firması olarak belirtilen firmanın üç aylık dönem içerisindeki ticari mallar hesabının borç kayıtlarında uygulama yapmıştır. Küçük tutarları analizden çıkardıktan sonra 12327 adet işlemin frekans dağılımını incelemiş ve bazı basamaktaki gözlemlerin Benford kanunu'ndan çok farklı olduğunu tespit etmiştir. Ticari mallar hesabının borç kayıtlarından örneklem seçilerek muhasebe denetim teknikleri ile test etmiş ve kullanılan yöntem ile hatalı ve hileli verilerin tespit edilmesinde etkili olduğunu düşünmüştür.

IV. YÖNTEM VE VERİ SETİ

Bu çalışmada kullanılan veri seti BİST-100 endeksinin 02.01.1990 ve 02.12.2013 tarihlerini kapsamakta ve TCMB veri tabanından alınmıştır. Çalışmada ilk olarak günlük kapanış fiyatları dikkate alınarak getiri hesaplanmış ve bir günlük getiri olabilmesi için hesaplanan getiri iki işlem günü farkına bölünmüştür. Örneğin Pazartesi günü getirisi hesaplanırken Cuma günü kapanış değerinin Pazartesi günü kapanış değerine bölünerek doğal logaritması alınmış ve iki işlem günü arasında üç gün olduğundan üçe bölünmüştür. Resmi tatil ve diğer tatiller içinde aynı tür hesaplamalar yapılarak veri seti birer günlük getiri haline getirilmiştir. Hesaplanan getirilerin ilk basamağındaki rakamın sıfırdan farklı bir rakam olabilmesi için veri seti sabit bir sayı ile çarpılmıştır. Bu çalışmada getiri

$$r_t = (\ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)) / d \quad (3)$$

hesaplanacak ve d iki işlem günü arasındaki fark, P_t t zamanındaki BİST kapanış değeri, P_{t-1} $t-1$ zamanındaki BİST kapanış değerini ifade etmektedir.

Veri setinin Benford kanununa uygun dağılıma sahip olup olmadığının araştırılması için ki-kare uygunluk testi yapılacaktır. Ki-kare istatistiği

$$\chi^2 = \sum_{e=1}^9 \frac{(o_e - e)^2}{e} \quad (4)$$

o_e her bir rakam için gözlenen frekans sayısını, e her bir rakam için beklenen frekans sayısını ifade etmektedir. Hesaplanan ki-kare değeri sekiz serbestlik derecesinde %1 anlamlılık seviyesinde 20,09 ve %5 anlamlılık seviyesinde ise 15,51 tablo değerleri ile karşılaştırılacaktır. Gözlem sayısının büyük olması durumunda Ki-kare uygunluk testi değerlerinin büyümesi nedeniyle veri setinin tamamının yanı sıra birinci veri seti olarak 02.01.1990 – 31.12.1997 tarihlerini, ikinci veri seti olarak 05.01.1998 – 30.12.2005 tarihlerini kapsayan ve üçüncü veri seti olarak 02.01.2006 – 02.12.2013 tarihlerini kapsayan üç periyoda bölünerek işlemler tekrarlanacaktır. İMKB veri seti için hesaplanacak değer tablo değerlerinden küçük çıkması durumunda İMKB getiri verisinin Benford dağılıma sahip olduğu söylenecektir.

Tablo 2. Veri setindeki getirilerin birinci basamaklarındaki rakamların gözlenen frekansları.

	Tüm Veri Seti	Birinci Veri Seti	İkinci Veri Seti	Üçüncü Veri Seti
rakam	Gözlenen Oran	Gözlenen Oran	Gözlenen Oran	Gözlenen Oran
1	0.3209	0.3120	0.3067	0.3440
2	0.1845	0.2021	0.1802	0.1712
3	0.1223	0.1210	0.1387	0.1074
4	0.0957	0.0907	0.0956	0.1008
5	0.0716	0.0776	0.0714	0.0659
6	0.0620	0.0660	0.0602	0.0598
7	0.0543	0.0504	0.0562	0.0562
8	0.0467	0.0474	0.0445	0.0481
9	0.0420	0.0328	0.0466	0.0466
Ki-kare Değeri	22.69	19.44	8.13	23.96
Gözlem Sayısı	5934	1984	1976	1974

Tablo 2’de verilen her bir rakam için gözlenen frekans oranının Tablo 1’de verilen birinci basamakataki beklenen oranlardan farklı olup olmadığı Ki-kare analizi kullanılarak test edilmiştir. Test sonucu elde edilen Ki-kare değerleri Tablo 2’de verilmiştir. Bütün veri setinde (5934 gözlem) hesaplanan Kİ-kare değerinin %1 anlamlılık seviyesinde tablo değerinden büyük olduğu veri setinin Benford kanunu’na uymadığı belirlenmiştir. Ancak veri seti üç alt döneme ayrılarak her bir alt dönemde analizler tekrarlandığında %1 anlamlılık seviyesinde hesaplanan Ki-kare değerinin birinci ve ikinci dönemlerde tablo değerinden küçük olduğu üçüncü dönemde ise büyük olduğu görülmektedir. Birinci ve ikinci dönemlerde getirilerin Benford dağılımına uyduğu ancak üçüncü dönemde Benford kanununa uymadığı tespit edilmiştir. Üçüncü dönem incelendiğinde bir rakamı ile başlayan getirilerin beklenenden daha fazla olduğu görülmektedir.

VI. SONUÇ

Borsa İstanbul endeksinin günlük getirilerin Benford Kanunun uygunluğunun test edildiği bu çalışma sonucunda daha önce yapılan çalışmalarla paralel bulgulara rastlanmıştır. Son dönem hariç BİST bir günlük getirilerinin Benford kanunu’na uygunluğu bulunmuş. Benford kanunu’nun vergi ve denetim alanında hileli kayıtların tespit edilmesi için kullanılması gibi borsa için manipülatif işlemlerin olup olmadığının belirlenmesi için de Benford kanunu’nun kullanılabileceği düşünülmüştür. Benford kanuna uygunluk genel anlamda endeks değerinin doğal olarak oluştuğunu göstermektedir. Üçüncü dönemde getirilerin Benford kanununa uygun olmaması ise getirilerde manipülasyon olabileceği şüphesini göstermektedir.

KAYNAKÇA

- Acar B. (2011) "Vergi denetiminde Benford yasalarının uygulanabilirliği", Vergi Raporu, Sayı:136, sy.56-63.
- Aktaş M. E. (2007) "Denetimde Benford Kanunu’nun uygulanması", Gazi Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, 9/1, 191-206.
- Benford F (1938) The law of anomalous numbers. Proc Am Phil Soc 78(4):551-572
- Buck, B., Merchant, A. and Perez, S. (1993) "An illustration of Benford's first digit law using alpha decay half lives", European J Phys, 14, 59-63.
- Burke, J. and Kincanon, E. (1991) "Benford's law and physical constants: the distribution of initial digits", Amer. J. Phys., 59, 952.
- Carslaw, C. (1988) "Anomalies in income numbers:evidence of goal oriented behavior", The Accounting Review, 63, 321-327.
- Drake P.D., Nigrini M. J. (2000) "Computer assisted analytical procedures using Benford's Law", Journal of Accounting Education, 18, 127-146
- Geyer D. (2010) "Detecting Fraud in Financial Data Sets", Journal of Business and Economics Research, Vol. 8, Number 7, 75-83.
- Hickman M. J., Rice S. K. (2010) "Digital Analysis of Crime Statistics: Does Crime Conform to Benford's Law?", J Quant Criminol, 26, 333-349.
- Hill T. P. (1995) "Base-Invariance Implies Benford's Law", Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 123, No. 3 (Mar., 1995), pp. 887-895
- Knuth, D. (1969) "The Art of Computer Programming", 2, 219-229. Addison-Wesley, Reading, MA.
- Leemis L. M., Schmeiser B. W., Evans D. L. (2000) "Survival Distributions Satisfying Benford's", The American Statistician, Vol. 54, No. 4 (Nov., 2000), pp. 236-241.
- Ley, E. (1995) "On the Peculiar Distribution of the U.S. Stock Indexes' Digits", The American Statistician, Vol. 50, No. 4 (Nov., 1996), pp. 311-313.
- Newcomb S (1881) "Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers", American Journal Mathematic 4(1):39-40

- Nigrini M. J., Miller S. J. (2009) "Data Diagnostics Using Second - Order Test of Benford's Law", *Auditing: A Journal of Practice & Theory*, Vol. 28, No. 2, 305-324
- Nigrini, M., Wood, W. (1996) "Assessing the integrity of tabulated demographic data", Working Paper, Saint Mary's University. Halifax, N.S.
- Pinkham R (1961) "On the distribution of first significant digits", *Annals of Mathematical Statistics*, 32, 1223-1230.
- Quick R., Wolz M. (2005) "Benford's Law in German Financial Statements", *Finance India*, Vol. XIX, No. 4, 1285-1302.
- Sehity el T., Hoelzl E., Kirchler E. (2005) "Price development after a nominal shock: Benford's Law and psychological pricing after the euro introduction", *International Journal of Research in Marketing*, 22, 471-480.
- Shengmin Z., Wenchao Wu, (2010) "Does Chinese Stock Indices Agree with Benford's Law?", *Management and Service Science (MASS), 2010 International Conference on*
- Tödter K H (1999) "Benford's Law as an Indicator of Fraud in Economics", *German Economic Review*, 10(3), 339-351.
- Türkyener C. M. (2007) "Benford yasası ve mali denetimde kullanımı", *Sayıştay Dergisi*, sayı:64, 111-122.
- Whittaker J. V., (1983) "On Scale-Invariant Distributions", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 43, No. 2 (Apr., 1983), pp. 257-267.



MARMARA
ÜNİVERSİTESİ



MARMARA
ÜNİVERSİTESİ